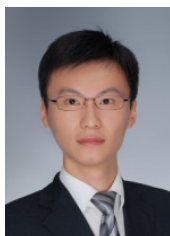




# 双刚体的连接减振分析

张庆庆 姜薛起 钮鑫钰 王辉均 王学林 温伟伟 梁梦瀚

(上海航天设备制造总厂有限公司, 上海 200245)



**摘要:** 对两种发射箱单独进行XYZ三方向上的正弦扫频实验, 得到两种发射箱的共振频率及振幅放大倍数, 并根据单自由度振动模型方程解出两种发射箱XYZ三个方向上的振动参数。再建立双发射箱刚体连接振动模型, 解出两个连接后发射箱新的频率、振幅与连接件刚度、阻尼的关系。最后, 通过制定寻优目标, 最大程度减小两箱的共振振幅, 解出两箱中间连接件的弹性系数及阻尼系数。将优化后的计算结果与两箱未连接时比较, 取得明显减小共振振幅的效果。

**关键词:** 刚体; 连接; 减振

## Joint Vibration Reduction Analysis of Double Rigid Bodies

Zhang Qingqing Jiang Xueqi Niu Xinyu Wang Huijun Wang Xuelin Wen Weiwei Liang Menghan

(Shanghai Aerospace Equipments Manufacturer Co., Ltd., Shanghai 200245)

**Abstract:** The resonance frequency and amplitude amplification factor are obtained by sinusoidal sweeping experiments in XYZ direction of the two launch canisters. By substituting the experimental data into the single-degree-of freedom vibration equation, get the vibration parameters of two launch canisters in XYZ directions. Then the vibration model of two rigid bodies is established, and the relationship between the new frequencies and amplitudes of two rigid bodies and the stiffness and damping of the joints is solved. Finally, the elastic and damp coefficients of the joints are solved by setting the optimum objective of minimizing the amplitude. Comparing the final calculation results with those without connection, the obvious effect of reducing the amplitude is achieved.

**Key words:** rigid body; connect; vibration reduction

### 1 引言

某型号战车上并排安装了两种不同发射箱。在工作过程中, 发射箱受到发射架传递过来的振动, 为了分析振动情况, 将两种发射箱均简化为单自由度振动系统<sup>[1]</sup>。

对于单自由度、小阻尼系统, 如图1所示, 包含了质量、弹簧、阻尼单元各一。令振动源的位移  $u = A \sin \omega t$ , 取质量单元与振动源静平衡位置为坐标原点。在任意时刻, 对质量单元  $m$  做受力分析, 列出方

程:

$$m\ddot{x} + K(x-u) + C(\dot{x}-\dot{u}) = 0 \quad (1)$$

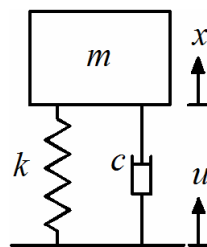


图1 单自由度振动模型

作者简介: 张庆庆 (1988), 硕士, 机械设计及自动化专业; 研究方向: 导弹发射车总装工艺技术研究。

收稿日期: 2019-10-18

在受迫振动时,质量单元响应与振动源输入之间频率相同,只存在一个相位差,质量单元的运动为  $x = X \sin(\omega t + \theta)$ , 定义动力放大系数:  $\beta = X / A$ , 可解得:

$$\beta = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\lambda)^2}}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \quad (2)$$

其中,  $\zeta = C / C_c$ , 为阻尼比;  $\lambda = \omega / \omega_n$ , 为频率比。  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$ , 为无阻尼自然角频率;  $C_c = 2m\omega_n$ 。通过式(2)可以得到动力放大系数  $\beta$  随频率比  $\lambda$  变化的曲线, 见图 2。

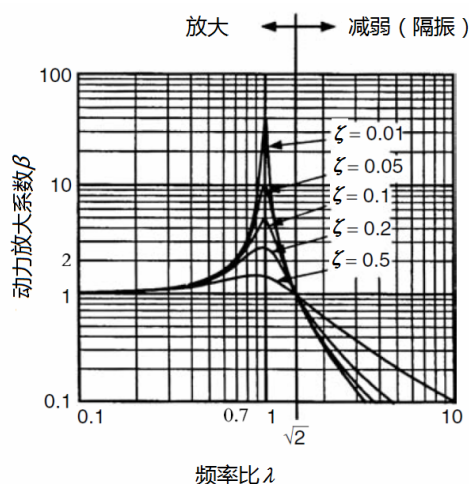


图 2 振动传递特性与频率比和结构阻尼关系曲线

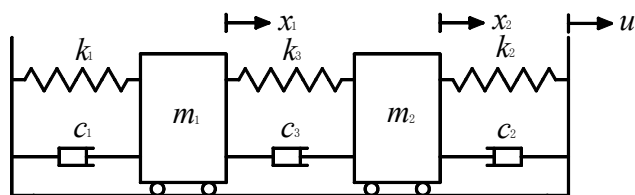


图 4 两种发射箱相互连接后振动模型

现考虑将两种发射箱相连, 预期通过调节连接件的刚度值及阻尼值, 使两种发射箱的共振振幅均能有所减小, 模型变为图 4 所示。由于三方向上的振动模型是相同的, 所以下面只对 Z 向进行分析。由试验知

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad \beta = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (3)$$

$\omega_r$  为共振频率,  $\beta$  为放大倍率, 可以解得图 4 中各参数如下:  $k_1 = 36210 \text{ kN/m}$ ,  $c_1 = 30.6 \text{ kN} \cdot \text{s/m}$ ,

## 2 双刚体连接振动模型

将两种发射箱三方向的振动均简化为单自由度振动模型, 如图 3 所示。其中,  $u$  为发射架的位移输入,  $x_1$ 、 $x_2$  为两种发射箱的位移响应。

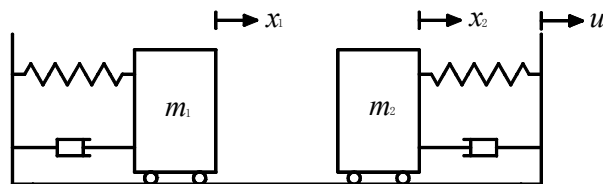


图 3 两种发射箱各方向振动模型

将两种发射箱安装在振动试验台, XYZ 三方向分别进行 20~100Hz 正弦扫频试验, 均只有一个共振峰, 共振频率及放大倍率见表 1。根据引言中的单自由度系统振动模型可以解出两种发射箱各方向上的振动参数。

表 1 两种发射箱各方向共振频率及放大倍率

| 发射箱类型 | 方向 | 共振频率/Hz | 放大倍率 |
|-------|----|---------|------|
| 寻的    | X  | 56.27   | 5.62 |
|       | Y  | 46.84   | 3.98 |
|       | Z  | 43.16   | 4.40 |
| 指令    | X  | 65.52   | 5.09 |
|       | Y  | 57.78   | 3.14 |
|       | Z  | 51.22   | 4.64 |

道, 寻的发射箱 Z 向共振频率是 43.16Hz, 放大倍率是 4.40; 指令发射箱 Z 向共振频率是 51.22Hz, 放大倍率是 4.64, 两种发射箱质量经过测量,  $m_1 = m_2 = 480 \text{ kg}$ , 根据单自由度系统的计算公式:

$k_2 = 51000 \text{ kN/m}$ ,  $c_2 = 34.8 \text{ kN} \cdot \text{s/m}$ 。  $k_3$ 、 $c_3$  为连接件的刚度值及阻尼值, 为设计变量, 由于连接件的质量相对

于发射箱来说很小, 故不予考虑。

模型的动力学方程为:

$$m_1 \ddot{x}_1 = k_1(u - x_1) + c_1(\dot{u} - \dot{x}_1) - k_3(x_1 - x_2) - c_3(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (4)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2(u - x_2) + c_2(\dot{u} - \dot{x}_2) + k_3(x_1 - x_2) + c_3(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (5)$$

写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_3 & -c_3 \\ -c_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 u + c_1 \dot{u} \\ k_2 u + c_2 \dot{u} \end{bmatrix} \quad (6)$$

这是一个二阶线性、常系数、非齐次的方程组。它的解由两部分组成, 一部分对应齐次方程的解, 即对应系统无阻尼自由振动的解。当阻尼存在时, 自由振动会随时间逐渐衰减, 因此可以不用考虑。解的另一部分为非齐次方程的一个特解, 是由于振动源引起

的强迫振动, 是一种稳态振动。采用复向量法<sup>[2]</sup>求解, 令输入位移  $u = Ue^{i\omega t}$ , 输出位移  $x_1 = X_1 e^{i\omega t}$ ,  $x_2 = X_2 e^{i\omega t}$ 。方程改写为:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} c_1 + c_3 & -c_3 \\ -c_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + i\omega c_1 \\ k_2 + i\omega c_2 \end{bmatrix} U \quad (7)$$

合并改写为:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_3 + i\omega(c_1 + c_3) - \omega^2 m_1 & -k_3 - i\omega c_3 \\ -k_3 - i\omega c_3 & k_2 + k_3 + i\omega(c_2 + c_3) - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + i\omega c_1 \\ k_2 + i\omega c_2 \end{bmatrix} U \quad (8)$$

解出:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 + i\omega(c_1 + c_3) - \omega^2 m_1 & -k_3 - i\omega c_3 \\ -k_3 - i\omega c_3 & k_2 + k_3 + i\omega(c_2 + c_3) - \omega^2 m_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_1 + i\omega c_1 \\ k_2 + i\omega c_2 \end{bmatrix} U \quad (9)$$

计算后结果为:

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= \left\{ \left[ k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_3) \right] (k_1 + i\omega c_1) U + (k_3 + i\omega c_3) (k_2 + i\omega c_2) U \right\} \\ &\quad / \left\{ \left[ k_1 + k_3 - \omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_3) \right] \left[ k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_3) \right] - (k_3 + i\omega c_3)^2 \right\} \\ X_2(\omega) &= \left\{ \left[ k_1 + k_3 - \omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_3) \right] (k_2 + i\omega c_2) U + (k_3 + i\omega c_3) (k_1 + i\omega c_1) U \right\} \\ &\quad / \left\{ \left[ k_1 + k_3 - \omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_3) \right] \left[ k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_3) \right] - (k_3 + i\omega c_3)^2 \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

目标关注的是两种发射箱新的共振峰值和频率, 定义:

$$H_1(\omega) = \frac{|X_1(\omega)|}{|U|}, \quad H_2(\omega) = \frac{|X_2(\omega)|}{|U|} \quad (11)$$

分别代表两种发射箱振幅放大倍数随输入频率变化的规律。

$$A = k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 - k_1 \omega^2 m_2 - c_1(c_2 + c_3)\omega^2 - c_2 c_3 \omega^2$$

$$B = \omega k_1(c_2 + c_3) + \omega k_2(c_1 + c_3) + \omega k_3(c_1 + c_2) - c_1 \omega^3 m_2$$

$$C = k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 - k_2 \omega^2 m_1 - c_2(c_1 + c_3)\omega^2 - c_1 c_3 \omega^2$$

$$D = \omega k_1(c_2 + c_3) + \omega k_2(c_1 + c_3) + \omega k_3(c_1 + c_2) - c_2 \omega^3 m_1$$

$$H_1(\omega) = \frac{\sqrt{(AE + BF)^2 + (BE - AF)^2}}{E^2 + F^2} \quad (12)$$

$$H_2(\omega) = \frac{\sqrt{(CE + DF)^2 + (DE - CF)^2}}{E^2 + F^2}$$

其中:

$$E = (k_1 + k_3 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - \omega^2 (c_1 + c_2)(c_2 + c_3) - k_3^2 + \omega^2 c_3^2$$

$$F = \omega(c_1 + c_3)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) + \omega(c_2 + c_3)(k_1 + k_3 - \omega^2 m_1) - 2\omega k_3 c_3$$

在  $H_1(\omega)$ 、 $H_2(\omega)$  分别到极大值时, 对应的  $\omega$  即 数求导, 令  $H_1'(\omega) = 0$ ,  $H_2'(\omega) = 0$  可得: 为连接后的共振频率。对  $H_1(\omega)$ 、 $H_2(\omega)$  利用复合函

$$\begin{aligned} & (E^2 + F^2)[(AE + BF)(AE + BF)' + (BE - AF)(BE - AF)'] \\ & = [(AE + BF)^2 + (BE - AF)^2](E^2 + F^2)' \\ & (E^2 + F^2)[(CE + DF)(CE + DF)' + (DE - CF)(DE - CF)'] \\ & = [(CE + DF)^2 + (DE - CF)^2](E^2 + F^2)' \end{aligned} \quad (13)$$

由于展开后的表达式太长, 这里用:

$$\Omega_1 = f_1(k_3, c_3), \Omega_2 = f_2(k_3, c_3) \quad (14)$$

表示两种发射箱共振峰值频率随连接件参数的变化规律, 代入到式 (12) 中可以得到两种发射箱共振幅值随连接件参数变化的规律, 记为:

$$H_1 = g_1(k_3, c_3), H_2 = g_2(k_3, c_3) \quad (15)$$

### 3 连接件参数对振幅影响分析

把减小两种发射箱的振幅作为目标, 可以寻找到一组最优的参数。这里采用的寻优目标为两种发射箱振幅放大倍数里较大的一个取到极小值, 这样可以使两种发射箱的振幅平均化并取得最小值。画出两种发射箱中较大的振幅随连接参数的变化, 见图 5。

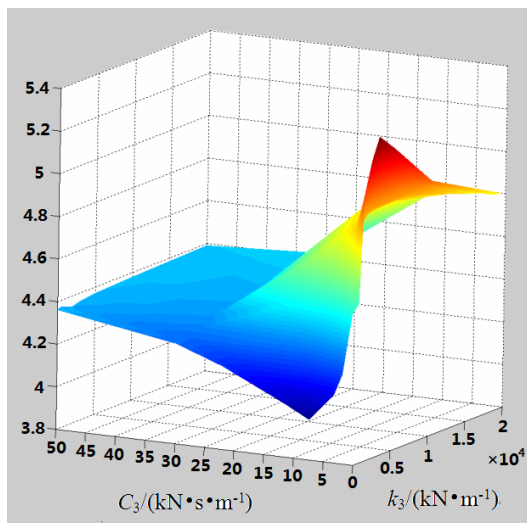


图 5 两种发射箱较大振幅随连接参数变化图

经计算,  $k_3=1200\text{kN/m}$ ,  $c_3=22.8\text{kN}\cdot\text{s/m}$  时, 两种发射箱振幅放大倍数分别为  $H_1=3.95$ 、 $H_2=3.95$ , 为振幅最小最优解。

由于  $X$  向及  $Y$  向振动系统模型与前面分析的相同, 只是振动参数不同, 同样可以得到  $X$  向、 $Y$  向最优的连接参数:

$X$  向:  $k_3=0\text{kN/m}$ ,  $c_3=25.5\text{kN}\cdot\text{s/m}$ ;  $H_1=4.78$ 、 $H_2=4.52$ 。

$Y$  向:  $k_3=0\text{kN/m}$ ,  $c_3=41.7\text{kN}\cdot\text{s/m}$ ;  $H_1=3.16$ 、 $H_2=3.05$ 。

根据计算, 采用最优连接参数的连接件将两种发射箱相连后,  $X$  向寻的发射箱与指令发射箱振幅分别下降 14.8%、11.1%,  $Y$  向振幅分别下降 20.6%、2.7%,  $Z$  向振幅分别下降 10.2%、14.1%, 均具有明显的降低振幅的效果。

### 4 结束语

经过理论分析, 将两种共振频率及幅值不同的发射箱相互连接, 通过调整连接件刚度、阻尼可以达到减小两种发射箱共振振幅的效果。

### 参考文献

- 1 邵忍平. 机械系统动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005
- 2 师汉民. 机械振动系统——分析·测试·建模·对策[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2004